

LA VERSION P-ADAPTABLE DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO: APLICACIONES EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

BELTRAN, F. (*); CERROLAZA, M. (**); ALARCON, E. (*)

(*) UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID. E.T.S.I. INDUSTRIALES

(**) INSTITUTO DE MATERIALES Y MODELOS ESTRUCTURALES. UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA, APTDO. POSTAL 50361, CARACAS 1050-A, VENEZUELA.

RESUMEN

Este trabajo discute la bondad de las técnicas numéricas p-autoadaptables, comparando el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Se presenta un breve resumen de las herramientas matemáticas necesarias para gobernar el proceso de refina-

miento en ambos métodos.

Finalmente, se presenta un ejemplo ilustrativo de relevancia práctica en ingeniería, el cual pone de manifiesto la potencia y versatilidad de las técnicas p-adaptables frente a situaciones reales.

INTRODUCCION

En los últimos años estamos asistiendo ya a la aplicación industrial de la versión p-adaptable del MEF para el análisis tensional dentro del diseño mecánico. A ello han contribuido investigadores como Babúska, Peano, Szabo o Zienkiewicz que, desde mediados de los años 70 hasta hoy mismo (el lector interesado puede consultar la extensa bibliografía que se da en la referencia 4), han puesto a punto una metodología que se encuentra ya implementada en programas comerciales /1,2/.

La versión P-adaptable del MEC para problemas de Elasticidad es de desarrollo posterior. Los primeros pasos para establecer su formulación se dan avanzada ya la presente década, y la investigación sigue abierta en muchas áreas /3,4/.

Aparte de otras ventajas de tipo numérico /5/, la principal cualidad de estas formulaciones P-adaptables para el analista es que permiten emplear mallas con el número de elementos y nodos estrictamente necesario para definir la geometría y las cargas, proporcionando además una indicación de la calidad de la solución obtenida. La entrada necesaria para el análisis tensional se reduce en general a definir una malla muy

gruesa o malla "base" y a fijar unas tolerancias para la calidad de la solución. El orden de la aproximación a los campos incógnita es incrementado sobre esta malla base de acuerdo con ciertos indicadores de error, que son calculados dentro de un proceso de autoadaptación de la solución. Este proceso es totalmente transparente al analista, y cesa cuando un estimador del error global señala que la calidad de la solución es ya suficiente (figura 1).

En el presente artículo se repasan en primer lugar muy brevemente los puntos clave de la versión P-adaptable del MEF y del MEC. Luego se analiza un mismo ejemplo práctico utilizando las dos formulaciones y se comparan los resultados obtenidos con cada una de ellas.

VERSION P-ADAPTABLE DEL MEF EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL.

Formulación clásica del MEF

La formulación clásica del MEF en elastostática /6,7/ toma como incógnita principal el campo de desplazamientos u . Las condiciones de compatibilidad en el dominio Ω del problema son satisfechos automáticamente puesto que el campo de

deformaciones ε se introduce en función de u . El equilibrio en el dominio y en el contorno se impone de forma "débil" exigiendo que:

$$\int_{\Omega} \omega \cdot (\operatorname{div} \sigma + f) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \omega \cdot (\bar{t} - \sigma \cdot n) d\Gamma = 0 \quad (1)$$

$$\forall \omega \in \mathcal{P}$$

donde el punto \cdot indica producto contraído y

$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t =$ contorno de Ω

$\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$

$\sigma =$ tensor tensiones

$f =$ campo de fuerzas p.u. de volumen

$n =$ vector unitario normal exterior a Γ

$\bar{t} =$ campo de tracciones impuestas en el contorno Γ_t .

$\mathcal{P} = \{ \omega : \omega \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \omega = 0 \text{ en } \Gamma_u \} =$
espacio de las funciones de ponderación.

$H^1(\Omega) =$ espacio de Sobolev de orden 1 sobre Ω .

Las condiciones de compatibilidad en el contorno Γ_u con movimientos impuestos \bar{u} , se hacen cumplir utilizando para u una aproximación de la forma:

$$u = u^* = \sum_{j=1}^P a_j v_j + \beta \quad (2)$$

donde

$$v_j \in \mathcal{P}, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

y

$$\beta \in J$$

con

$$J = \{ \beta : \beta \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \beta = \bar{u} \text{ en } \Gamma_u \}$$

De este modo se cumple también de manera automática la compatibilidad en el contorno.

Aplicando el teorema de la divergencia y reorganizando términos, la ecuación (1) se convierte en:

$$K a = b$$

donde K es la matriz de rigidez global y b es el vector de acciones exteriores.

$$\int_{\Omega} \sigma : \operatorname{grad} \omega d\Omega = \int_{\Omega} \omega \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \omega \cdot \bar{t} d\Gamma$$

$$\forall \omega \in \mathcal{P} \quad (3)$$

Si se introduce en esta relación la aproximación u^* a u a través de las ecuaciones constitutivas y de compatibilidad, se pueden plantear P ecuaciones tomando como funciones de ponderación v_j cada una de las funciones v_j . Este sistema de ecuaciones nos permite obtener los coeficientes a_j de (2) y así determinar la aproximación u^* . A partir del campo u^* se obtienen inmediatamente los campos ε^* y σ^* utilizando las ecuaciones de compatibilidad y las ecuaciones constitutivas.

Versión P-adaptable: jerarquía, indicadores y estimadores del error.

En la versión clásica del MEF las funciones v_j y β en (2) se escogen de manera que los coeficientes a_j coincidan con los valores de las componentes del campo de desplazamientos aproximado u^* en ciertos puntos llamados nodos. Esta elección proporciona sentido físico a dichos coeficientes, pero obliga, cada vez que se quiera mejorar la calidad de la aproximación u^* introduciendo nuevas funciones v_j , a redefinir la malla incrementando el número de nodos y a recalcular completamente la matriz de rigidez global K y el vector de acciones exteriores b .

En la versión P-adaptable del MEF se establece una "jerarquía" entre las funciones de aproximación v_j , de manera que la mejora de calidad en la solución se establece en cada paso añadiendo las funciones pertenecientes al siguiente escalón dentro de la jerarquía /5/. De este modo, al incluir el conjunto de funciones v_j correspondiente a un nivel de aproximación todas las funciones empleadas en los niveles anteriores, pueden aprovecharse los términos ya calculados de K y b .

El establecimiento de la jerarquía proporciona además un modo "natural" para la construcción de indicadores del error local. Estos indicadores señalan, en cada ciclo de autoadaptación, dónde resulta más rentable introducir nuevas funciones de aproximación. Si el campo de desplazamientos aproximado u^* viene dado por (2) y se está estudiando la conveniencia de introducir una nueva función de aproximación v_{p+1} , puede suponerse que el error e en la parte del dominio Ω donde v_{p+1} toma valores no nulos (Ω_{p+1}) viene dado por:

$$e = u - u^* = a_{p+1} v_{p+1} \quad (4)$$

siempre que v_{p+1} sea la siguiente función dentro de la jerarquía establecida. Puede entonces tomarse como indicador de error I en Ω_{p+1} la norma energética de este campo de errores:

$$I = ||e||^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{p+1}} \sigma^e : \varepsilon^e d\Omega \quad (5)$$

donde σ^e y ε^e son las tensiones y deformaciones asociadas al campo de errores e .

Recorrido todo el dominio Ω de esta manera, en aquellas zonas donde el indicador de error I sea más alto se introducirán las funciones de aproximación siguientes en la jerarquía.

El otro elemento clave dentro del esquema de autoadaptación de la solución es la estimación del error global, puesto que esta nos dirá cuándo hemos alcanzado una calidad prefijada y podemos, por tanto, dejar de introducir nuevas funciones de aproximación y dar por terminado el proceso.

Los estimadores del error global buscan una medida de la diferencia entre el potencial total correspondiente a la solución exacta u y el que se obtiene de la solución aproximada u^* .

Generalmente los estimadores de error entran dentro de una de las categorías siguientes:

(a) Los que se obtienen como suma de los indicadores de error I para todas las nuevas funciones de aproximación posibles dentro de la jerarquía (Basu et al /8/).

(b) Los calculados como una cierta norma del campo de residuos

$$\begin{aligned} r &= \text{div } \sigma^* + f \quad \text{en } \Omega \\ c &= \bar{t} - \sigma^* \cdot n \quad \text{en } \Gamma_t \quad \text{al /5/).} \end{aligned}$$

(c) Los que aprovechan alguna relación teórica entre el número de grados de libertad y el error en la energía (Szabo /9/).

Cualquiera de estos estimadores, o una combinación de los mismos, puede utilizarse para controlar el ciclo de autoadaptación de la solución.

VERSION P-ADAPTABLE DEL MEC EN ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

Formulación clásica del MEC.

Una de las grandes ventajas del MEC radica en que las variables incógnita son interpoladas solamente sobre la frontera Γ del dominio Ω en estudio, consiguiéndose así la reducción en un orden de la dimensionalidad del problema. Para ello es necesario disponer de una relación entre las variables conocidas y las incógnitas sobre el contorno, la cual se denomina "identidad de Somigliana" y se expresa por (ignorando las fuerzas de dominio f):

$$\begin{aligned} C(P) \cdot u(P) + \int_{\Gamma} T^*(P) \cdot u \, d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} U^*(P) \cdot t \, d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

La expresión anterior constituye una relación de reciprocidad entre el estado actual de tracciones t sobre la frontera Γ , el estado de desplazamientos u también sobre la frontera Γ , y una solución fundamental definida por una carga unitaria concentrada aplicada en un punto $P \in \Gamma$. Tal solución queda caracterizada por los tensores $T^*(P)$ y $U^*(P)$. $C(P)$ es un tensor geométrico que depende de la geometría de la frontera Γ en el entorno de P . El lector interesado en los detalles de la formulación puede consultar, por ejemplo, la referencia /10/.

La interpretación de los tensores $T^*(P)$ y $U^*(P)$ como funciones de ponderación de tipo global, permite la interpolación de las variables incógnita u y t utilizando las técnicas clásicas de los métodos proyectivos. El estado de tracciones y desplazamientos sobre el contorno Γ del dominio es caracterizado por:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \bar{u} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_u \\
\bar{t} &= \bar{t} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_t \\
\bar{u} &= ? \quad \text{sobre} \quad \Gamma_t \\
\bar{t} &= ? \quad \text{sobre} \quad \Gamma_u
\end{aligned}
\quad (7)$$

Así pues, la discretización de la frontera Γ en elementos de contorno y la interpolación de los campos de variables desconocidas conducen a la conocida relación matricial:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{d} \quad (8)$$

en la cual ya se han impuesto las condiciones de contorno apropiadas. $\underset{\sim}{x}$ colecciona los campos de variables desconocidas, mientras que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{d}$ representan la ordenación de los coeficientes de influencia del problema, usualmente calculados por integración numérica /11,12,16/.

La versión clásica del MEC se basa en criterios de interpolación isoparamétrica y en una discretización suficientemente fina de la frontera, capaz de recoger los estados locales de los campos de variables. Así pues, un mismo conjunto de puntos definidos sobre la frontera Γ es utilizado para: a) definir los elementos de la discretización; b) soporte de las funciones de interpolación locales; c) definir las condiciones de contorno sobre la frontera y d) como puntos de colocación de la solución fundamental para escribir las ecuaciones integrales.

Versión P-adaptable.

La versión P-adaptable del MEC se inscribe dentro de la formulación arriba presentada, pero permite separar adecuadamente la interpolación de las variables conocidas y desconocidas, realizando esta última de una manera autoadaptable.

Igual que en la versión P-adaptable del MEF, se selecciona aquí una familia de funciones P-jerárquicas adecuada. La introducción de nuevas funciones de aproximación para mejorar la solución obtenida supone en este caso la elección de nuevos puntos para colocar la solución fundamental. Este conjunto de puntos debe escogerse de tal manera que satisfaga básicamente los criterios siguientes /4,13/ a) tan lejos como sea posible de puntos de colocación previos para evitar el mal condicionamiento del sistema de ecuaciones y b) la nueva ecuación debe reforzar el elemento diagonal de la matriz de influencia.

Los criterios para evaluar el error cometido en la solución aproximada son, indudablemente, la piedra angular de las técnicas autoadaptables en cualquier método. Así pues, es necesario disponer aquí también de indicadores locales y estimadores globales del error para poder decidir "dónde", "cómo" y "hasta cuándo" refinar la aproximación en la malla base.

El indicador local de error utilizado por los autores tiene la expresión /13,14/.

$$\|e\|_{Kj}^2 = \frac{\left[\int_{\Gamma_K} N_j^{n+1} r_j d\Gamma \right]^2}{\int_{\Gamma_K} N_j^{n+1} L_j(P) N_j^{n+1} d\Gamma} \quad (9)$$

donde:

K = elemento sobre el cual se refina en la etapa en curso.

j = variable que se refina en la etapa en curso.

r_j = función residuo obtenida sobre el elemento K .

N_j^{n+1} = nueva función de aproximación a introducir.

L_j = operador integral vectorial basado en la identidad de Somigliana.

La expresión (9) nos permite determinar cuáles variables y sobre cuáles elementos se debe refinar, de forma que obtengamos el mayor grado de precisión con el menor número de nuevas funciones.

La función residuo r puede ser escrita como:

$$\underset{\sim}{r}(P) = \underset{\sim}{c}(P) \left[\underset{\sim}{\hat{u}}(P) - \underset{\sim}{u}^{\text{comp}}(P) \right] \quad (10)$$

donde $\underset{\sim}{c}$ es la matriz que depende de la geometría en el entorno del punto de colocación P , $\underset{\sim}{\hat{u}}$ es la solución obtenida mediante la interpolación de los valores actuales sobre puntos en el interior de los elementos que se refinan. $\underset{\sim}{u}^{\text{comp}}$ son los valores obtenidos al colocar la solución fundamental también en puntos interiores de los elementos que se refinan.

Finalmente, el valor del estimador global del error se calcula mediante la norma H_0 de Hilbert (Reddy /15/).

$$\|E\|_0 = \left[\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{nd} r_i^2(P) d\Gamma \right]^{1/2}$$

donde nd es la dimensionalidad del problema estudiado (2 en nuestro caso).

EJEMPLO ILUSTRATIVO

Para mostrar el funcionamiento de las versiones P-adaptables del MEF y del MEC se ha escogido el cálculo tensional del conjunto presa de gravedad-macizo rocoso /6/.

El objetivo es obtener la distribución tensional alrededor del agujero interior de la presa.

Las mallas base empleadas se representan en la figura 2. Obsérvese que no se hace una discretización especialmente fina alrededor del agujero interno, como sería necesario utilizando versiones no autoadaptables.

En las figuras 3 y 4 se representan las tensiones principales obtenidas a lo largo de la superficie libre del agujero, para sucesivos refinamientos de las mallas base. Nótese cómo la autoadaptación de la solución conduce hacia los valores considerados "exactos", aún partiendo de mallas no muy apropiadas para el estudio del problema. Es decir, el proceso autoadaptable tiende a "corregir" los errores cometidos por el analista al hacer la discretización.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un resumen de las bases teóricas de la versión P-adaptable del MEF y del MEC. Las principales ventajas de estas versiones frente a las tradicionales son: a) reducen el volumen de la entrada de datos y de la salida de resultados, con lo que se ahorra tiempo y se disminuyen las posibilidades de error; b) minimizan la sensibilidad de la solución frente a errores en la discretización, una misma malla base puede ser utilizada frente a solicitaciones muy diferentes y c) proporcionan una estimación de la calidad de la solución obtenida.

Estas ventajas hacen que las versiones P-adaptables sean especialmente atractivas en el campo del análisis ten-

sional dentro del diseño industrial ya que, aparte de requerir analistas menos experimentados, permiten cuantificar la calidad de los cálculos a la vez que se invierte menos tiempo en la preparación y postproceso de los mismos.

REFERENCIAS

- /1/ A. PEANO: "General Purpose Systems Based on Adaptive Finite Elements. Software Design Considerations". ISMES. Bergamo. 1984.
- /2/ B. TAYLOR y S. GUPTA: "Control of the Error of Discretization and Idealization in the New P-version Finite Element Program. PROBE". Proc. 2nd Int. Conf. on Supercomp. Appl. in Automotive Industry. Sevilla. 1988.
- /3/ E. ALARCON y A. REVERTER: "P-adaptive Boundary Elements". Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 23 pp. 801-829. 1986.
- /4/ M. CERROLAZA y E. ALARCON: "P-adaptive Boundary Elements for three dimensional potential problems", Comm. App. Num. Methods, Vol. 3, pp. 335-345 (1987).
- /5/ O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY, J. GAGO y I. BABUSKA: "Hierarchical Finite Element Approaches, Error Estimates and Adaptive Refinement". MAFELAP. Brunel University. 1981.
- /6/ O.C. ZIENKIEWICZ y K. MORGAN: "Finite Elements and Approximation". Wiley. 1983.
- /7/ T. HUGHES: "The Finite Element Method". Prentice-Hall, 1987.
- /8/ P. BASU y A. PEANO: "Adaptivity in P-Version Finite Element Analysis" ASCE Journal of Structural Eng. Vol 109, NO. 10. 1983.
- /9/ B. SZABO: "Estimation and Control of Error Based on P Convergence". en "Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in F.E. Computations". editado por I. Babuska et al. Wiley. 1986.
- /10/ C.A. BREBBIA, J.F. TELLES y L.C. WROBEL: "Boundary element techniques: Theory and applications in Engineering". Springer-Verlag, Berlín, 1984.

- /11/ M. CERROLAZA y E. ALARCON: "A Biquadratic coordinate transformation for the evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals". Int. J. Num. Met. Eng. (aceptado para publicación). 1989.
- /12/ M. CERROLAZA: "Elementos de Contorno P-Adaptables: Desarrollo y Aplicaciones en Teoría del Potencial y Elastostática". Tesis Doctoral, E.T.S.I.I. Madrid. 1988.
- /13/ M. CERROLAZA y E. ALARCON: "The P-Adaptive BIEM approach for two-dimensional Elasticity Analysis". Micro Comp. in Civil. Eng., Vol. 4, 1989.
- /14/ M. CERROLAZA, S. GOMEZ y E. ALARCON: "Elastostatics p-adaptive Boundary Elements for Micros". Soft. for Eng. Workstations, Vol 4 (1), 18-26. 1988.
- /15/ J.N. REDDY: "An introduction to the Finite element method". McGraw-Hill Book, Singapore (1984).
- /16/ A.H. STROND y D. SECREST: "Gaussian quadrature formulae". Prentice-Hall, Nueva York, 1966.

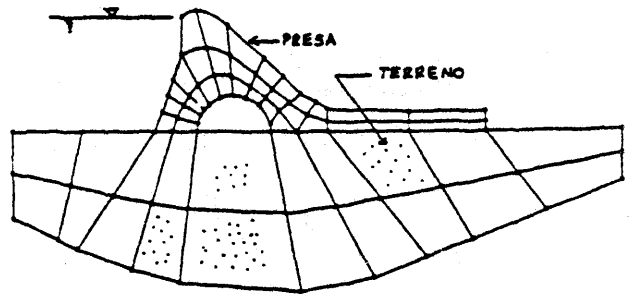


FIG. 2a. Malla base MEF.

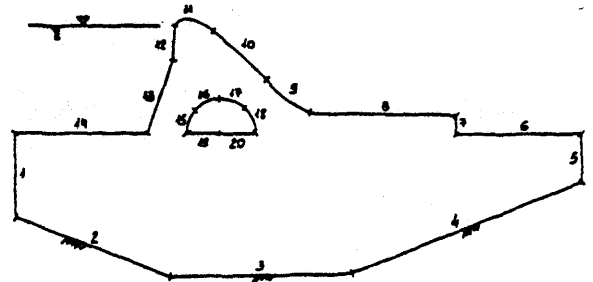


FIG. 2b. Malla base MEC.

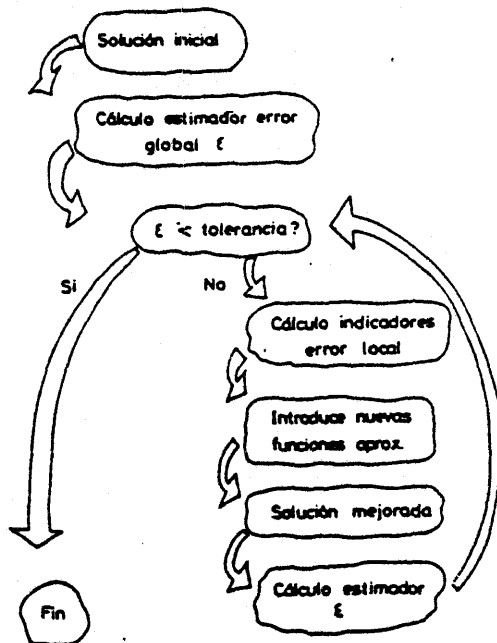


FIG. 1. Proceso de autoadaptación.

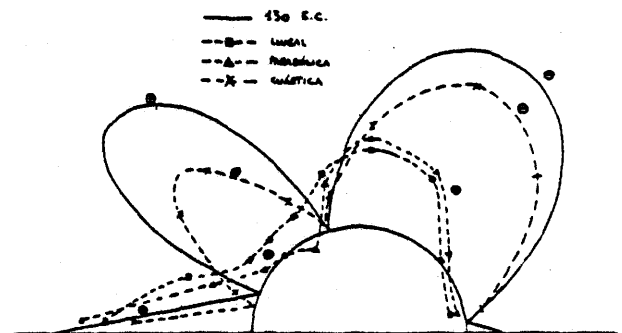


FIG. 3. Tensiones MEF p-adaptable.

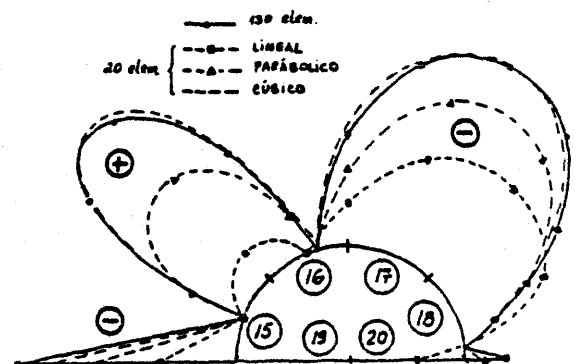


FIG. 4. Tensiones MEC p-adaptable.